УДК 330
DOI: 10.31651/2076-5843-2019-1-38-43

Рачковский Николай Николаевич,
кандидат физико-математических наук, доцент,
Государственный институт управления
и социальных технологий Белорусского
государственного университета,
https://orcid.org/0000-0002-9087-2552
nickracz@mail.ru;
Егоров Александр Вениаминович,
кандидат экономических наук, доцент,
Государственный институт управления
и социальных технологий Белорусского
государственного университета,
https://orcid.org/0000-0003-0871-8626
jahorau@gmail.com

О СУЩЕСТВОВАНИИ ОПТИМАЛЬНЫХ ПОРТФЕЛЕЙ ИНВЕСТИЦИЙ

Рассмотрена проблема существования оптимальных портфелей инвестиций. Для решения этой проблемы введено понятие предельной кривой безразличия и предложена методика использования этой кривой при нахождении оптимальных портфелей. Указанная методика развивает и уточняет существующие в научной литературе методики нахождения оптимальных портфелей.

Ключевые слова: *инвестиционный портфель; доходность портфеля; риск портфеля; Парето-оптимальность; среднее квадратическое отклонение; эффективная граница множества портфелей; кривые безразличия; предельная кривая безразличия.*

Постановка проблемы. Одной из самых актуальных проблем финансового менеджмента является проблема правильного (оптимального) распределения инвестиций. Как известно, для решения этой проблемы рассматриваются понятия портфеля инвестиций и оптимального портфеля инвестиций, разработана методика нахождения оптимального портфеля. Однако, как нам представляется, при рассмотрении этой проблемы упускается достаточно важный ее аспект, состоящий в выяснении вопроса существования оптимального портфеля. Данная работа посвящена рассмотрению этого аспекта.

Цель статьи: изложить сущность проблемы существования оптимальных портфелей инвестиций.

Изложение основного материала исследования. Итак, рассмотрим стандартную задачу нахождения оптимального портфеля: имеется конечный набор акций A_1, A_2, …, A_n, каждая из которых характеризуется средней доходностью $\bar{k}_i$ и риском σ_i, $i = 1; 2; \dots; n$, причем под риском понимают среднее квадратическое отклонение возможной доходности k_i от средней доходности $\bar{k}_i$; требуется составить из этих акций оптимальный по критерию «доходность-риск» портфель. Общепринятый метод решения такой задачи состоит в следующем (см., например, [1, 2, 3, 4, 5]). На координатной плоскости $O\sigma k$ изображается множество всех возможных портфелей, состоящих из акций A_1, A_2, …, A_n (на Рис. 1 заштрихованная область отражает множество всех портфелей, состоящих из акций A_1, A_2, A_3);для этого множества строится эффективная граница, т.е. совокупность всех Парето-оптимальных относительно второго координатного угла точек (на Рис. 1 это дуга BCD); затем рассматриваются все кривые безразличия, характеризующие предпочтения ((не)склонность к риску) рассматриваемого инвестора (на Рис. 1 некоторые из этих кривых изображены линиями Y_1, Y_2, Y_3), и среди таких кривых предпочтения выбирается та, которая касается эффективной границы множества портфелейна Рис. 1 это кривая Y_2). Точка касания (на Рис. 1 это точка C) и будет соответствовать оптимальному для данного инвестора портфелю.

Напомним, что под портфелем здесь понимается совокупность акций A_1, A_2, …, A_n, в которой акции A_1 составляют долю ω_1, акции A_2 – долю ω_2, …, акции A_n – долю ω_n, причем все числа ω_1, ω_2, …, ω_n неотрицательны, а их сумма равна 1. Понятно, что при таком подходе портфели акций A_1, A_2, …, A_n можно отождествлять с упорядоченными наборами соответствующих коэффициентов $(\omega_1; \omega_2; \dots; \omega_n)$. Известно, что средняя доходность $\bar{k}$ и риск σ портфеля $(\omega_1; \omega_2; \dots; \omega_n)$ вычисляются по формулам:

$$\bar{k} = \omega_1 \cdot \bar{k}_1 + \omega_2 \cdot \bar{k}_2 + \dots + \omega_n \cdot \bar{k}_n;$$

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \omega_i^2 \cdot \sigma_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} \omega_i \cdot \omega_j \cdot r_{ij} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_j},$$

где r_{ij} – коэффициент корреляции для пары акций (A_i, A_j).

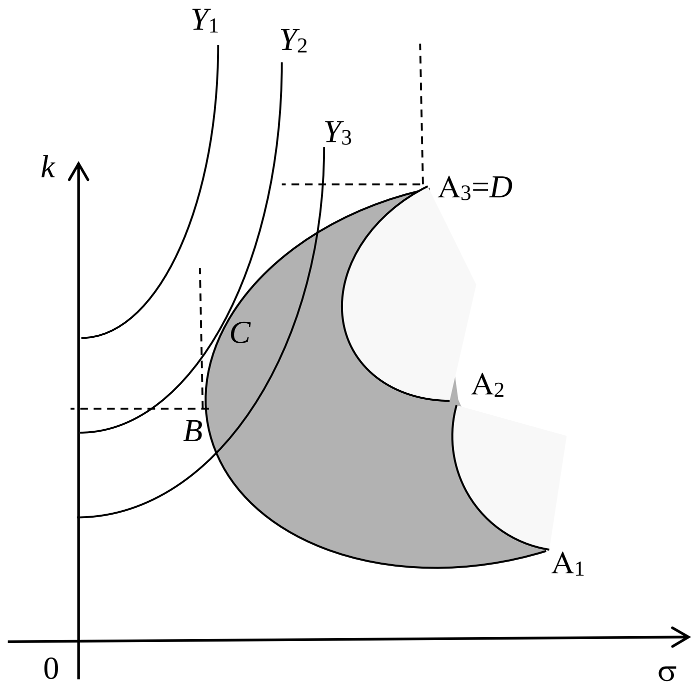

Рис. 1. Нахождение оптимального портфеля.

При указанном подходе в литературе на эту тему само собой предполагается, что оптимальный портфель всегда существует. Однако нетрудно заметить, что наличие оптимального портфеля обеспечивается существованием кривой безразличия, касающейся эффективной границы множества портфелей. В связи с этим естественным образом возникает вопрос: через каждую ли точку координатной плоскости $O\sigma k$ можно провести кривую безразличия? В случае положительного ответа на этот вопрос, по-видимому, можно ожидать существования оптимального портфеля; в противном случае требуется дополнительное исследование. Итак, зафиксируем произвольную точку$(\sigma; k)$и предположим, что существует кривая безразличия, проходящая через эту точку (на Рис. 2 это кривая Y). Найдем точку пересечения $(0; k_0)$ этой кривой с координатной осью Ok. Тогда рассматриваемая точка (портфель) $(\sigma; k)$ в глазах инвестора равноценна точке (портфелю) $(0; k_0)$, характеризующемуся нулевым риском и доходностью k_0, при этом величину $\Delta k = k - k_0$ можно интерпретировать как необходимую с точки зрения инвестора плату за риск σ. Заметим, что вряд ли какого бы то ни было инвестора устроит портфель с отрицательной доходностью; поэтому естественным будет требование $k_0 \geq 0$ или, что то же самое, $\Delta k \leq k$.

Таким образом, возникает необходимость рассмотрения кривой безразличия, состоящей из точек (портфелей), равноценных точке (портфелю) (0;0) с нулевым риском и нулевой доходностью; эту кривую мы будем называть **предельной кривой безразличия** данного инвестора (на Рис. 2 это кривая Z). Каждую точку $(\sigma^*; k^*)$ этой кривой можно интерпретировать следующим образом: первая координата σ^* – это максимальный приемлемый для данного инвестора риск при соответствующей доходности k^*, а вторая координата k^* – это минимальная приемлемая доходность при соответствующем риске σ^*. Нетрудно видеть, что приемлемыми для данного инвестора будут лишь точки (портфели), находящиеся **не ниже** предельной кривой безразличия, и только для таких точек существуют проходящие через них кривые безразличия.

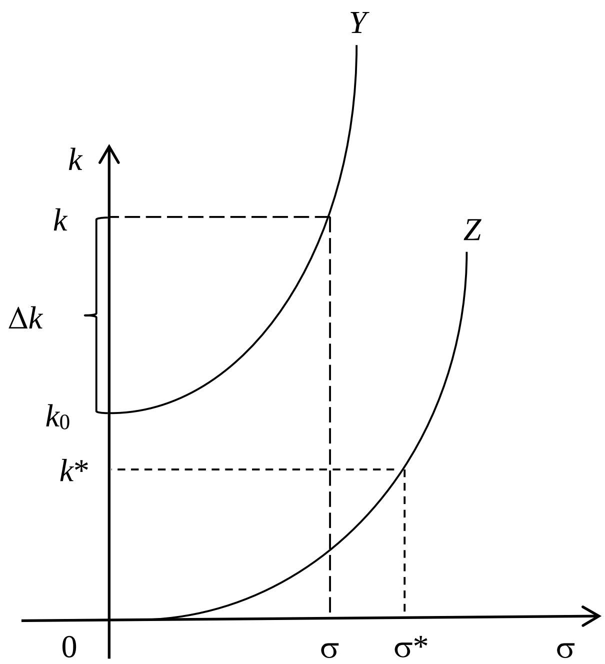

Рис. 2. Предельная кривая безразличия.

Из вышесказанного вытекает следующий вывод: при нахождении оптимального портфеля достаточно рассматривать не всю эффективную границу множества портфелей, а лишь ее часть, лежащую не ниже предельной кривой безразличия; если такая часть эффективной границы существует, то существует и оптимальный портфель, в противном случае нет не только оптимальных, но даже приемлемых для данного инвестора портфелей.

Подытоживая вышесказанное, можно предложить следующий уточненный алгоритм нахождения оптимального портфеля:

1) на координатной плоскости строится множество всех возможных портфелей, состоящих из заданного набора активов $A_1, A_2, \ldots, A_n$;

2) на этой же координатной плоскости строится предельная кривая безразличия рассматриваемого инвестора;

3) еслипредельная кривая безразличия лежит выше множества портфелей, то не существует приемлемых для данного инвестора портфелей, и значит, не существует и оптимального портфеля;

4) если предельная кривая безразличия лежит не ниже множества портфелей и касается его в одной точке, то эта точка касания является единственным приемлемым для данного инвестора портфелем, а значит, она является оптимальным портфелем;

5) если предельная кривая безразличия разбивает множество всех возможных портфелей на два фрагмента, один из которых расположен не ниже этой кривой, а другой – ниже, то в качестве допустимого множества портфелей рассматривается первый из упомянутых фрагментов;

6) строится эффективная граница допустимого множества портфелей;среди всех возможных кривых безразличия находят ту, которая касается эффективной границы допустимого множества портфелей в одной точке; эта точка и определяет оптимальный для данного инвестора портфель.

Приведенный выше алгоритм проиллюстрирован на Рис. 3а, 3б, 3в.

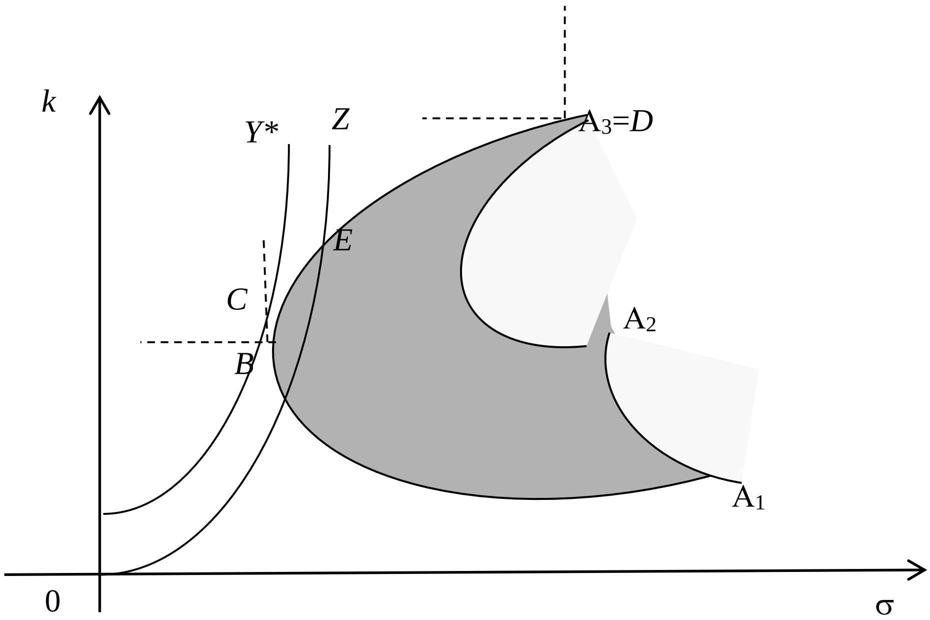

Рис. 3а. Нахождение оптимального портфеля, когда множество приемлемых портфелей бесконечно.

На Рис. 3а рассмотрен случай, когда множество всех портфелей (заштрихованная область) разбивается предельной кривой безразличия Z на два фрагмента, при этом эффективная граница (дуга BD) пересекаетсяпредельной кривой безразличия Z в точке E. В этом случае достаточно ограничиться рассмотрением лишь фрагментом эффективной границы – дугой BE, лежащей не ниже предельной кривой безразличия Z; кривая безразличия Y^*, касающаяся дуги BE в точке C, определяет оптимальный портфель – точку C.

На Рис. 3б рассмотрена ситуация, когда предельная кривая безразличия Z касается множества всех портфелей в точке C. В этом случае точка касания Cявляется единственным приемлемым для данного инвестора и потому определяет оптимальный портфель.

Наконец, на Рис. 3в рассмотрен случай, когда множество всех портфелей расположено ниже предельной кривой безразличия Z. В этом случае данный инвестор среди всех возможных портфелей не может выбрать ни один приемлемый портфель и, значит, в этой ситуации оптимальных портфелей нет.

Рис. 3б. Нахождение оптимального портфеля, когда приемлемый портфель единственен.

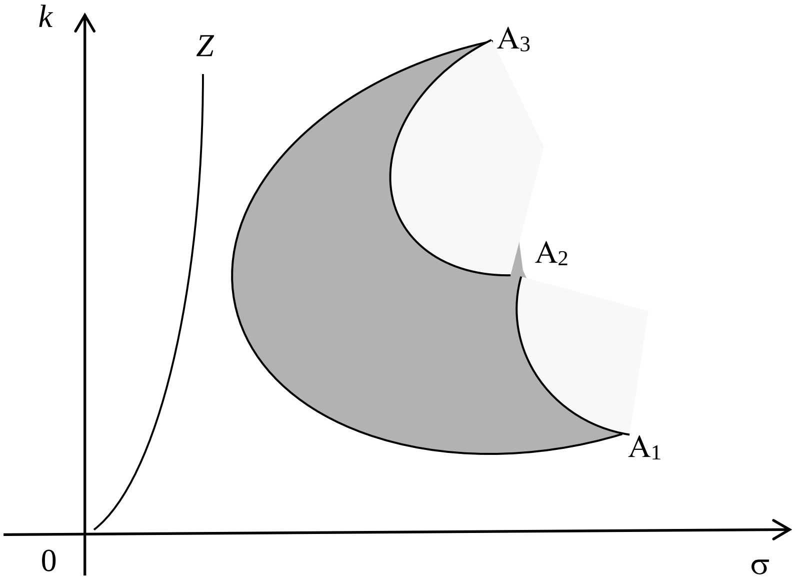

Рис. 3в. Отсутствие приемлемых портфелей.

Выводы. Таким образом, мы видим, что существование оптимального портфеля равносильно существованию приемлемых для данного инвестора портфелей; существование же последних тесным образом связано с взаимным расположением множества всех возможных портфелей и введенной в данной статье предельной кривой безразличия, характеризующей личные предпочтения рассматриваемого инвестора.

Список использованной литературы:

1. Brigham, Eugene F., Houston, Joel F. Fundamentals of Financial Management: Concise Edition, 6th edition, South-Western Cengage Learning, 2009.
2. Bodie, Z, Merton, R. Finance: Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall, 2000.
3. Bodie, Z. On the Risk of Stocks in the Long Run. Financial Analysts Journal, May – June 1995.
4. Elton E.J., Gruber M. J. Modern portfolio Theory and Investment Analysis. 4-th edition, John Wieley & Sones, Inc.1991.
5. Markowitz H.M. Foundation of portfolio theory / Journal of Finance. June 1991. P. 469 - 477.

References:

1. Brigham, Eugene F., Houston, Joel F. Fundamentals of Financial Management: Concise Edition, 6th edition, South-Western Cengage Learning, 2009.
2. Bodie, Z, Merton, R. Finance: Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall, 2000.
3. Bodie, Z. On the Risk of Stocks in the Long Run. Financial Analysts Journal, May – June 1995.
4. Elton E.J., Gruber M. J. Modern portfolio Theory and Investment Analysis. 4-th ed. John Wieley & Sones, . Inc.1991.
5. Markowitz H.M. Foundation of portfolio theory / Journal of Finance. June 1991. P. 469 - 477.

Rachkovski N.N.,
Assistant Professor of the State Institute of Management
and Social Technologies of the Belorussian State University.
Egorov A.V.,
Assistant Professor of the State Institute of Management
and Social Technologies of the Belorussian State University.

ABOUT THE EXISTENCE OF OPTIMAL PORTFOLIOS

Introduction*. One of the most relevant problems of financial management is the problem of finding an optimal investment portfolio. As a rule the optimality is considered on two standards: the average portfolio yield and its risk (standard deviation of the portfolio yield from its average yield is considered as a*

risk). Portfolio optimization is done according to two optimality criteria on the basis of the Pareto optimality concept. As a result is an effective boundary of the variety of admissible portfolios. But the effective boundary is often contains an infinite number of portfolios. The indifference curves characterizing preferences of this particular investor are used to localize the optimal portfolio. In modern scientific literature the method of finding the optimal portfolio is well advanced, but the problem of the existence of the acceptable portfolios and optimal portfolio for the investor is absolutely uninvestigated.

***Purpose**. The problem of the existence of the acceptable portfolios and optimal portfolio for the investor is considered and investigated.*

***Methods**. For solving the problem, the concept of the marginal indifference curve is introduced. The marginal indifference curve characterizes the behavior (preferences) of the investor. Each point of this curve has coordinates* $(\sigma^*; k^*)$*. The first coordinate* σ^* *is the maximal acceptable risk for the investor with an appropriate yield* k^**, and the second coordinate* k^* *is the minimal acceptable yield at an appropriate risk* σ^**. Only the points (portfolios) that are not below the marginal indifference curve are acceptable for this investor, and only these points have an in indifference curves passing through it. In this way, only those portfolios that are not below the marginal indifference curve will be acceptable for the investor.*

***Results.** Admissible, and therefore, optimal portfolios for the investor exist if and only in the variety of all possible portfolios there are points lying not below the marginal indifference curve. In view of this fact the method of finding the optimal portfolio was offered, and this method is specifying a method known in the scientific literature.*

***Originality.** The research and the results are new, because the problem of existence admissible and optimal portfolios of investments had not been previously considered.*

***Conclusion.** Using the marginal indifference curve to research the existence of the admissible portfolios is efficient since in some cases it helps to speed up and to simplify the process of searching the optimal investment portfolio. Indeed in case the marginal indifference curve divides the variety of all possible portfolios into two parts, searching the optimal portfolio may be conducted in the minority of the admissible portfolios; in case the marginal indifference curve touches the effective boundary at one point, this point of contact is the optimal portfolio; in case the variety of all possible portfolios is below the marginal indifference curve, there is no admissible and therefore optimal portfolio.*

***Keywords:** investment portfolio; portfolio yield; portfolio risk; Pareto optimality concept; optimal portfolio; effective boundary of an infinite number of portfolios; indifference curves; marginal indifference curve.*

Одержано редакцією: 19.01.2019
Прийнято до публікації: 06.02.2019